Groupe B

MATHÉMATIQUES

On admettra les relations suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad \alpha_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}.$$

Première partie

I. 1° Soit $n \in \mathbb{N}$; démontrer l'existence de $\theta_n(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t} \frac{t^n}{n!} dt$.

I. 2° Exprimer $\sum_{m=0}^{n} e^{-x} \frac{x^m}{m!}$ à l'aide de $\theta_n(x)$. Calculer $\theta_n(0)$.

I. 3° Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u > -\sqrt{n}$, on pose

$$\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) - \left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n \exp\left(-u\sqrt{n}\right) = [1 - \exp g_n(u)] \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right).$$

Montrer que chaque fonction g_n est croissante et trouver $\lim_{n \to +\infty} g_n(u)$.

I. 4° Calculer la limite, pour $n \to +\infty$, de

$f_n(h, k) = \theta_n(n - h\sqrt{n}) - \theta_n(n + k\sqrt{n})$, où $h \geqslant 0, k \geqslant 0$.

Tournez la page S. V. P.

Deuxième partie

II. 1° Soit $I_n = 1 - \theta_n(n)$; calculer $I = \lim_{n \to +\infty} I_n$.

II. 2° Montrer que la suite (I_n) est strictement croissante.

II. 3° Montrer que, pour $0 \leqslant u \leqslant 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n^2 \left[\left(1 + \frac{u}{n}\right)^n \exp(-u) - 1 + \frac{u^2}{2n}\right]$$

est borné par un réel indépendant de u et de n.

II. 4° Montrer que, pour $0 \leqslant a \leqslant 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n^2 \left[\frac{\theta_n(n) - \theta_n(n+a)}{\alpha_n} - a + \frac{a^3}{6n}\right]$$

est borné par un réel indépendant de a et de n.

II. 5° Déterminer μ tel que $n^2 \left[\frac{I_{n+1} - I_n}{\alpha_n} - \frac{\mu}{n}\right]$ soit borné par un réel indépendant de $n \in \mathbb{N}^*$.

II. 6° Soit $\varphi_n(a) = 1 - \theta_n(n + a)$; calculer $\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{\alpha_n}[\varphi_{n+1}(a) - \varphi_n(a)]$.

II. 7° Montrer que, pour n assez grand, on a

$$\varphi_n(0) < I < \varphi_n(1)$$

Troisième partie

III. 1° Montrer qu'il existe un unique réel λ_n tel que

$$\lambda_n > 0, \quad \theta_n(\lambda_n) = 1 - I$$

et que, pour n assez grand, on a $n < \lambda_n < n + 1$.

III. 2° Calculer $\lambda = \lim_{n \to +\infty} (\lambda_n - n)$.

III. 3° En déduire un équivalent de $I - I_n$.

-12- ENS ULM SEVRES 82

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail